Nachhilfestunde 3

$f_1(x)=\frac{8}{x^2-4}$, $f_2(x)=\frac{2x}{x^2-4}$, $f_3(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-4}$ und $f_4(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-4}$

$g_1(x)=\frac{16}{x^2+4}$, $g_2(x)=\frac{8x}{x^2+4}$, $g_3(x)=\frac{2x^2-8}{x^2+4}$ und $h(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2+9}$

Untersuchung dieser gebrochen rationalen Funktionen. Grundeigenschaften

Niveau: Grundkurs Gymnasium oder Fachoberschule

Datei Nr. 43203

Stand 27. April 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

VORWORT

In 19 Schritten werden einige Funktionen vom Typ $f(x)=\frac{....}{x^2+a}$ untersucht.

Ihr Merkmal ist der Nennergrad 2.

Mit $\boxed{\text{GW}}$ kennzeichne ich „Grundwissen“

Um diese Themen geht es:

$\boxed{1}$ Wir beginnen mit der Untersuchung von $f_1(x)=\frac{8}{x^2-4}$ und $f_2(x)=\frac{2x}{x^2-4}$

$\boxed{2}$ Es geht um die Definitionsbereiche, die Nullstellen und senkrechten Asymptoten.

$\boxed{3}$ Beide Kurven haben eine waagrechte Asymptote, die man mit einem Grenzwert beweist.

$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ Grenzwert von $f_3(x)=\frac{2x^2+2}{x^2-4}$ für $x\to\pm\infty$.

$\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ **Große Aufgabe:** $f_4(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-4}$, Grundeigenschaften,

$\boxed{9}$ Punktsymmetrie und 2 schwere Ableitungen

$\boxed{10}$, $\boxed{11}$ Extrempunkte und Wendepunkte

$\boxed{12}$ **Vergleich** von $g_1(x)=\frac{16}{x^2+4}$, $g_2(x)=\frac{8x}{x^2+4}$ und $g_3(x)=\frac{2x^2-8}{x^2+4}$

$\boxed{13}$ Ihre Schaubilder erkennen

$\boxed{14}$ Die Funktionen an Hand bestimmter Merkmalen identifizieren

$\boxed{15}$ **Große Aufgabe:** $h(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2+9}$. Grundeigenschaften, zwei Ableitungen

$\boxed{16}$ Extrempunkte

$\boxed{17}$ Wendepunkte

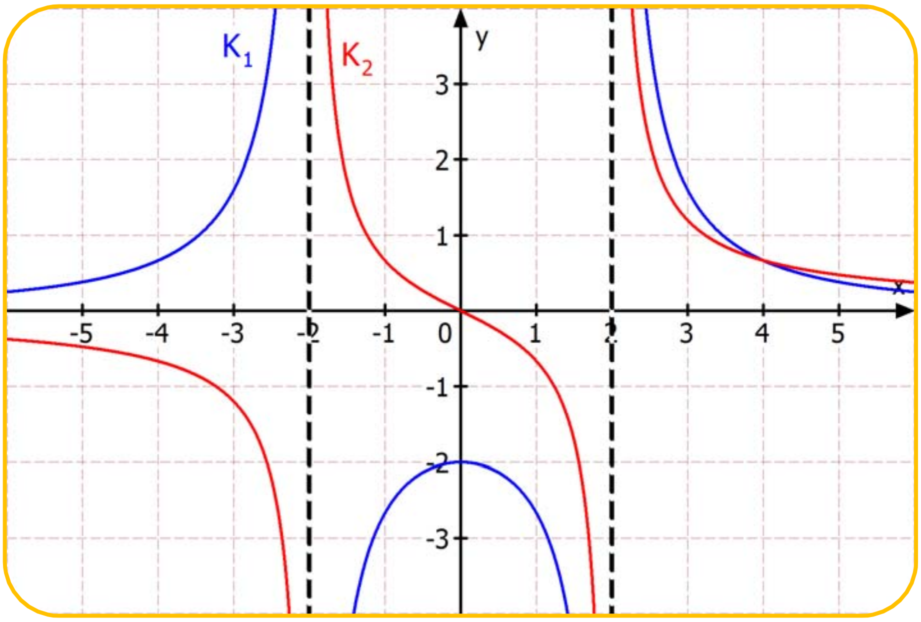
$\boxed{18}$ Grenzwert für $x\to\pm\infty$ und waagrechte Asymptote

$\boxed{19}$ Punktsymmetrie zu einem Wendepunkt.

Auf der nächsten Seite beginnt der 1. Abschnitt unserer Lösung!

$\boxed{1}$ Wir beschäftigen uns heute mit gebrochen rationalen Funktionen deren Funktionsterm den Nennergrad 2 hat.

Zuerst diese beiden Funktionen: $f_1(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$ und $f_2(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$



Manche Fakten kann man sofort an den Gleichungen erkennen:

(a) Was besagen die beiden Nenner?

(b) Was besagen die beiden Zähler?

$\Rightarrow$ $\boxed{2}$

$\boxed{2}$ Gegeben sind $f_1(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$ und $f_2(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

DER NENNER gibt einen Hinweis auf den **Definitionsbereich** der Funktionen.

Da man nicht durch 0 dividieren kann, frage man: Für welches x wird der Nenner Null?

$$N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$

Wenn man ganz gründlich vorgeht, dann zieht man die Wurzel, <u>und zwar so</u>:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{und} \quad \sqrt{4} = 2$$

Man beachte, dass eine Quadratwurzel per Definition stets eine positive Zahl sein muss.

Daher benötigt man bei $\sqrt{x^2} = |x|$ den Betrag.

Und so sieht die Rechnung insgesamt aus:

$$\begin{aligned} N = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \\ x^2 &= 4 \qquad | \sqrt{\ } \qquad (1) \\ |x| &= 2 \qquad\qquad (2) \end{aligned}$$

Und dann:

$$x = \pm 2 \qquad\qquad (3)$$

Leider sieht man immer wieder diese <u>falsche Schreibweise</u>:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \qquad | \sqrt{\ } \qquad (1) \\ x &= \pm 2 \qquad\qquad (3) \end{aligned}$$

Was ist daran falsch? Es fehlt doch nur die Zeile (2) !!

Daher könnte man meinen: $\cancel{\sqrt{x^2} = x}$ und $\cancel{\sqrt{4} = \pm 2}$.

Beides ist nicht richtig. Wer allerdings aus dem roten Feld die Zeile (2) mit dem Betrag weglassen will, kann das tun, muss aber dann auch die <u>**Befehlsanweisung**</u> $|\sqrt{\ }$ <u>**weglassen**</u>.

Denn von (1) nach (3) zieht man nicht nur die Wurzel, sondern löst auch noch den Betrag auf.

Wenn man also herausgefunden hat, dass der Nenner für x = 2 oder -2 Null wird, kann man den **Definitionsbereich** für f_1 und f_2 anschreiben: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$\Rightarrow$ K_1 und K_2 habe an den Stellen 2 und -2 eine **senkrechte Asymptote**.

Was besagen die beiden ZÄHLER?

Bei $f_1(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$ steht im Zähler die Konstante 8.

Daher hat f_1 keine Nullstellen, denn ein Bruch wird nur dann Null, wenn der Zähler Null ist.

Bei $f_2(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ steht im Zähler der Term 2x.

Daher hat f_2 die Nullstelle = 0, denn $f_2(0) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$

(c) Berechne die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{3}$ Die Zeichnung in $\boxed{1}$ lässt vermuten, dass beide Graphen sich nach rechts, also für $x \to \infty$, und nach links, also für $x \to -\infty$, der x-Achse annähern. Mit anderen Worten:

Die x-Achse ist für K_1 und K_2 eine waagrechte Asymptote.

Beweis:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2}}$$

Jetzt muss man Grundwissen verwenden: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Damit geht die Rechnung so weiter:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Analog gilt für f_2:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Für beide Funktionen ist also 0 der Grenzwert des Funktionswerts für $x \to \pm\infty$.

Wir wollen uns das etwas genauer ansehen:

Entscheidend für das Ergebnis 0 ist der Grenzwert im Zähler: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$

Der erste Schritt heißt dabei:

Kürze durch die höchste x-Potenz des Nenners, also durch x^2.

Weil der Zähler aber einen Exponenten kleiner als 2 hat,

hat man nach diesem Kürzen im Zähler nur die Brüche $\frac{8}{x^2}$ bzw. $\frac{2}{x}$

Und so hat der Zähler den Grenzwert 0, also auch f_1 oder f_2.

$\boxed{4}$ Das ändert sich bei der nächsten Funktion: $f_3(x) = \frac{2x^2+2}{x^2-4}$

Berechne den Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

$\Rightarrow \boxed{5}$

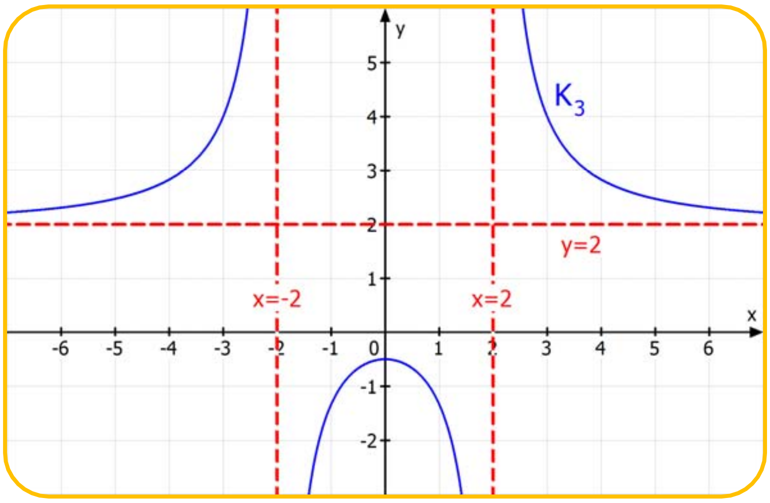
$\boxed{5}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+2}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{2+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

Kürzen durch x^2

Die geometrische Interpretation dazu heißt:

K_3 hat die waagrechte Asymptote $y = 2$.



$\boxed{6}$ **Nun ändere ich noch einmal den Zähler und verwende den Grad 3:**

$$f_4(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$$

Untersuche bitte K_3 auf Schnittpunkte mit der x-Achse und Asymptoten.

Ist K_3 symmetrisch?

Meine Lösung folgt in $\Rightarrow$ $\boxed{7}$

$\boxed{7}$ Gegeben ist $f_4(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$ **So sollte man vorgehen:**

Zähler = 0: $x^3+2x=0 \Leftrightarrow x(x^2+2)=0$ Nullprodukt.

1. Faktor: $x = 0$

2. Faktor: $x^2+2=0$ bzw. $x^2=-2$ keine Lösung!

Nenner = 0: $x^2-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2$

Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse $\mathbf{N(0\,|\,0)}$

Senkrechte Asymptoten: $x=2$ und $x=-2$

Verhalten für $x \to \pm\infty$: *Versuch*, einen Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_4(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} \triangleq \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\pm\infty+0}{1-0} = \pm\infty}$$

Diese Rechenzeile ist nicht zulässig, da Unendlich kein Grenzwert ist.

Man will mit dieser Zeile sagen, dass die Funktionswerte gegen $\pm\infty$ gehen.

Das korrekte Vorgehen sieht etwa so aus:

Man sieht, dass der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners:

Grad Z = 3 und Grad N = 2.

Dann rechnet man den Bruchterm mit **Polynomdivision** in einen gemischten Bruch um:

$$(x^3+2x):(x^2-4) = x$$
$$-(x^3-4x)$$
$$\overline{\quad 6x = \text{Rest}}$$

Ergebnis: $\boxed{f_3(x) = x + \frac{6x}{x^2-4}}$

Für $x \to \pm\infty$ geht der Restbruch gegen 0,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{6}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-4} = 0$$

so dass $f_3(x) \approx x$ übrig bleibt. Also ist $y = x$ eine schräge Asymptote.

$\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{8}$ Ich fasse zusammen: **GW**

Die Funktion $f_4(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 4}$ hat einen um 1 größeren Zählergrad als der Nennergrad. Dann hat sie für $x \to \pm\infty$ <u>keinen</u> Grenzwert.

Durch eine Polynomdivision kann man sie ein zwei Summanden zerlegen.

Damit hat man $\underbrace{f_4(x) = x}_{g(x)} + \frac{6x}{x^2 - 4}$

Der Restbruch hat für $x \to \pm\infty$ den Grenzwert 0.

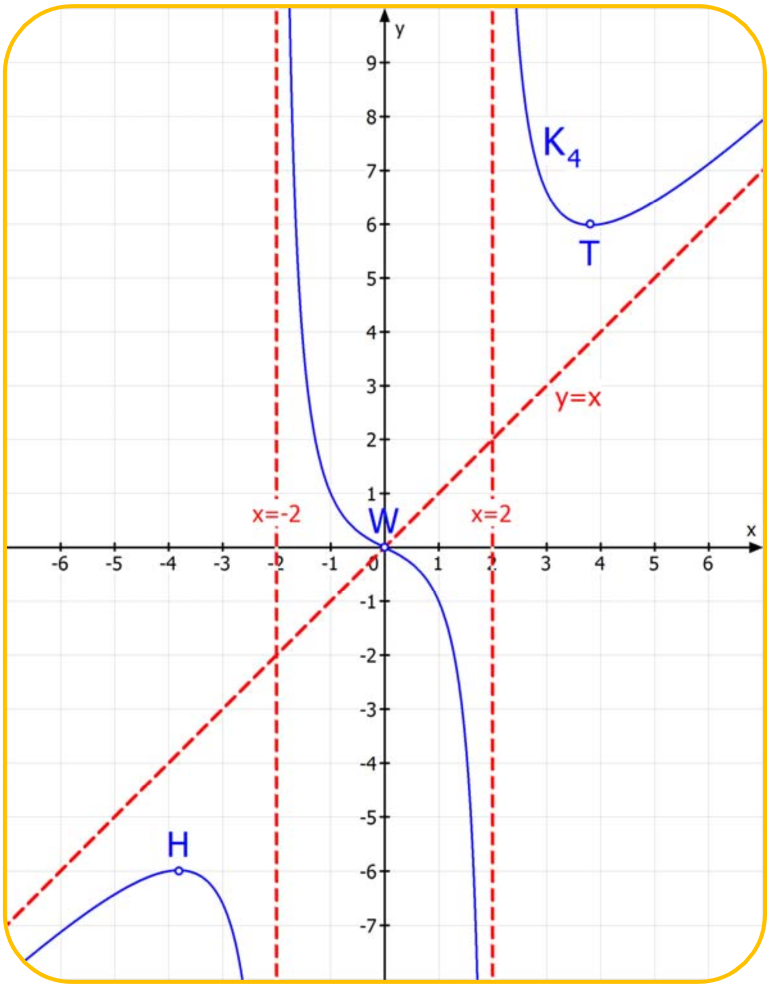
Der ganzrationale Anteil $y = x$ gibt eine schräge Asymptote an.

Aufgabe:

Beweise eine Symmetrie von K_4

und berechne die beiden Extrempunkte.

$\Rightarrow$ $\boxed{9}$



$\boxed{9}$ **Behauptung:** $f_4(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-4}$ ist **punktsymmetrisch zum Ursprung:**

Beweis: $$f_4(-x)=\frac{(-x)^3+2(-x)}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3-2x}{x^2-4}=-\frac{x^3+2x}{x^2-4}=-f_4(x)$$

Berechne nun bitte zwei Ableitungen

1. Ableitung mit der Quotientenregel: $f_4'(x)=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$

Es sei $u=x^3+2x \Rightarrow u'=3x^2+2$

und $v=x^2-4 \Rightarrow v'=2x$

$$f_4'(x)=\frac{(3x^2+2)(x^2-4)-2x\cdot(x^3+2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$f_4'(x)=\frac{\left[3x^4+2x^2-12x^2-8\right]-\left[2x^4+4x^2\right]}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-14x^2-8}{(x^2-4)^2}$$

Für die 2. Ableitung sei: $u=x^4-14x^2-8 \Rightarrow u'=4x^3-28x^2$

und: $v=(x^2-4)^2 \Rightarrow v'=2\cdot(x^2-4)\cdot 2x$

$$f_4''(x)=\frac{(4x^3-28x)\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}}-\cancel{(x^2-4)}\cdot 4x\cdot(x^4-14x^2-8)}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f_4''(x)=\frac{4\cdot(x^3-7x)\cdot(x^2-4)-4x\cdot(x^4-14x^2-8)}{(x^2-4)^3}$$

$$f_4''(x)=4\frac{(x^3-7x)\cdot(x^2-4)-x\cdot(x^4-14x^2-8)}{(x^2-4)^3}$$

$$f_4''(x)=4\frac{\cancel{x^5}-7x^3-4x^3+28-\cancel{x^5}+14x^3+8x}{(x^2-4)^3}=4\cdot\frac{3x^3+36x}{(x^2-4)^3}=12\cdot\frac{x^3+12x}{(x^2-4)^3}$$

Das war nicht einfach.

Berechne nun bitte die Extrempunkte.

$\Rightarrow \boxed{10}$

$\boxed{10}$ Berechnung der Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f_4'(x) = 0$

d. h. $\frac{x^4 - 14x^2 - 8}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 14x^2 - 8 = 0$

Dies ist eine **biquadratische Gleichung.**

Mit der Substitution $z = x^2$ wird daraus $u^2 - 14u - 8 = 0$

Mitternachtsformel: $u_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196+32}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{228}}{2} \approx \frac{14 \pm 15{,}1}{2} \approx \begin{cases} 14{,}55 \\ -0{,}55 \end{cases}$

Rücksubstitution: $x^2 = u_1 \approx 14{,}55 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{14{,}55} \approx \pm 3{,}81$

$x^2 = -0{,}55 \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}$

Hinreichende Bedingung: $f_4''(3{,}81) = 12 \cdot \frac{3{,}81^3 + 12 \cdot 3{,}81}{(14{,}55-4)^3} > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum.

Man muss diesen Bruch nicht berechnen. Es reicht, wenn man erkennt, dass Zähler und Nenner positiv sind, so dass auch der Bruch positiv ist.

Damit hat K_4 an der Stelle 3,81 einen Tiefpunkt und wegen der **Punktsymmetrie zu O** an der Stelle -3,81 einen Hochpunkt.

Die **y-Koordinaten** sind: $f_4(3{,}81) \approx \frac{3{,}81^3 + 2 \cdot 3{,}81}{3{,}81^2 - 4} \approx 6{,}0$ und $f_4(-3{,}81) \approx -6{,}0$

Ergebnis: K_4 hat den Tiefpunkt $T \approx (3{,}81 \mid 6)$ und den Hochpunkt $H \approx (-3{,}81 \mid -6)$

Bestimme nun den einzigen Wendepunkt von K_4.

$\Rightarrow \boxed{11}$

$\boxed{11}$ Berechnung des Wendepunkts

Notwendige Bedingung: $f_4''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 12x = 0$

d. h. $x(x^2 + 12) = 0$ Nullprodukt.

1. Faktor: $x = 0$

2. Faktor $x^2 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -12 \quad \Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}$. Keine Lösung.

Die **notwendige Bedingung** wäre der Nachweis von $f_4'''(0) \neq 0$

Doch weil bereits die zweite Ableitung so kompliziert war, rechnet man das nicht aus sondern argumentiert so:

Da 0 eine **einfache Nullstelle** von f_4'' ist, hat f_4'' dort einen **Vorzeichenwechsel**.

Das ist für K_4 ein Krümmungswechsel.

Daher ist der Ursprung ein Wendepunkt.

$\boxed{12}$ Nun kümmern wir uns um Funktionen mit dem Nenner $N = (x^2 + 4)$.

Sie heißen: $g_1(x) = \frac{16}{x^2+4}$, $g_2(x) = \frac{8x}{x^2+4}$ und $g_3(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+4}$

Ihre Besonderheit sind die gleichen Nenner, die nicht Null werden können.

Denn $x^2 + 4 = 0$ bedeutet $x^2 = -4$, was ja nicht möglich ist.

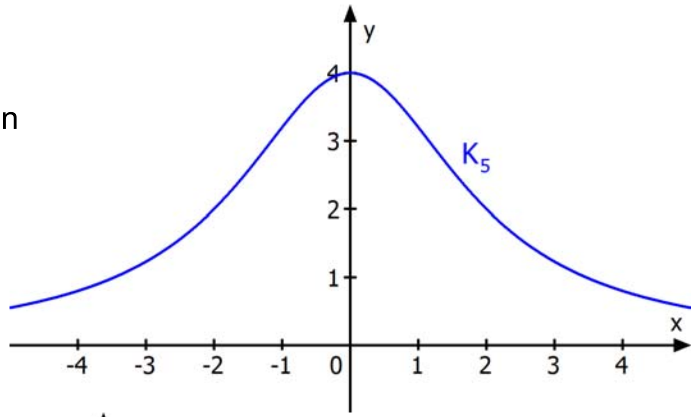
Also kann man gleich dies folgern:

Diese Funktionen haben den **Definitionsbereich** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und somit auch keine **senkrechten Asymptoten**.

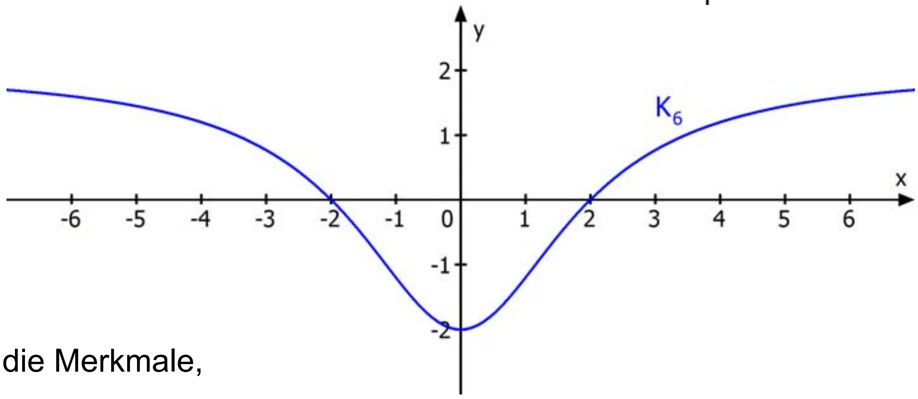
Nun betrachte bitte die folgenden drei Schaubilder.

$\Rightarrow \boxed{13}$

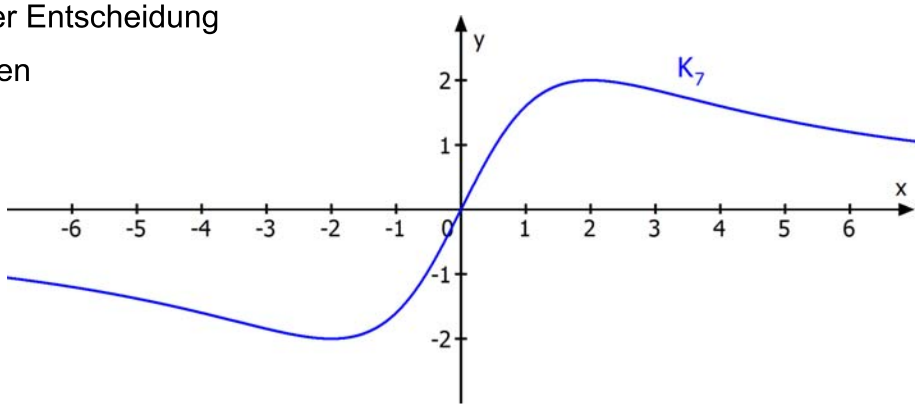
$\boxed{13}$ Diese drei Kurven sind die Schaubilder der Funktionen g_1, g_2 und g_3.



Finde heraus, welche Kurve zu welcher Funktion gehört.



Beschreibe die Merkmale, die zu deiner Entscheidung geführt haben



$\Rightarrow$ $\boxed{14}$

$\boxed{14}$ Kennzeichnung der Kurven:

Das erste Unterscheidungsmerkmal sind die Funktionswerte an der Stelle 0:

$g_1(0) = \frac{16}{4} = 4$ $\quad P_1(0\,|\,4) \in K_5$ $\quad$ Schaubild von g_1.

$g_2(0) = 0$ $\quad P_2(0\,|\,0) \in K_7$ $\quad$ Schaubild von g.

$g_3(0) = -2$ $\quad P_3(0\,|\,-2) \in K_6$ $\quad$ Schaubild von g_3.

Das zweite Unterscheidungsmerkmal sind die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{16}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{16}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8x}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8}{x}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Ergebnis: Die Schaubilder K_5 von g_1 und K_7 von g_2 habe die x-Achse als waagrechte Asymptote.

Hinweis: Bei g_1 und g_2 ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, was erkennbar zum Grenzwert 0 führt, also zur waagrechten Asymptote $y = 0$.

Bei g_3 haben Zähler Nenner den gleichen Grad, was zu einem Grenzwert $\neq 0$ führt, also zu einer waagrechten Asymptote führt, die nicht die x-Achse ist.

Info: Ist der Zählergrad um 1 größer als der Nennergrad, dann hat die Kurve eine schräge Asymptote (siehe $\boxed{8}$.)

Das dritte Unterscheidungsmerkmal ist die Symmetrie:

$$g_1(-x) = \frac{16}{(-x)^2+4} = \frac{16}{x^2+4} = g_1(x)$$ Symmetrie bzgl. der y-Achse.

$$g_2(-x) = \frac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+4} = -\frac{8x}{x^2+4} = -g_2(x)$$ Punktsymmetrie bzgl. O.

$$g_3(-x) = \frac{2(-x)^2-8}{(-x)^2+4} = \frac{2x^2-8}{x^2+4} = g_3(x)$$ Symmetrie bzgl. der y-Achse.

$\Rightarrow \boxed{15}$

$\boxed{15}$ Wir wollen jetzt noch gemeinsam eine Kurvendiskussion durchführen:

$h(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2+9}$ Das Schaubild sei K.

a) **Definitionsbereich:** Der Nenner wird nie Null, also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Daher hat H auch **keine senkrechte Asymptote.**

b) **Nullstellen**: $h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ doppelte Nullstelle.

Daher hat K einen Berührpunkt mit der x-Achse: $N(3\,|\,0)$.

d) **Zwei Ableitungen** mit der Quotientenregel.

Für die 1. Ableitung sei:

$u = (x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2(x-3)\cdot 1 = 2x-6$

$v = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad v' = 2x$

$$h'(x) = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2} = \frac{(2x-6)(x^2+9) - 2x\cdot(x-3)^2}{(x^2+9)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 18x - 54 - 2x(x^2-6x+9)}{(x^2+9)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 6x^2 + 18x - 54 - \cancel{2x^3} + 12x^2 - 18x}{(x^2+9)^2} = \frac{6x^2 + \cancel{18x} - 54 - \cancel{18x}}{(x^2+9)^2} = \boxed{6\cdot\frac{x^2-9}{(x^2+9)^2}}$$

Für die 2. Ableitung sei:

$u = x^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x$

$v' = 2\cdot(x^2+9)\cdot 2x = 4x\cdot(x^2+9)$

$$h''(x) = 6\cdot\frac{2x(x^2+9)^{\cancel{2}} - 4x\cancel{(x^2+9)}(x^2-9)}{(x^2+9)^{\cancel{4}\,3}} = 6\frac{2x^3 + 18x - 4x^3 + 36x}{(x^2+9)^3} \text{s}$$

$$h''(x) = 6\frac{-2x^3 + 54x}{(x^2+9)^3} = \boxed{-12\cdot\frac{x^3 - 27x}{(x^2+9)^3}}$$

e) Berechne nun bitte die beiden Extrempunkte.

$\Rightarrow \boxed{16}$

$\boxed{16}$ **Berechnung der Extrempunkte zu** $h(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2+9}$

mit $h'(x)=6\cdot\dfrac{x^2-9}{\left(x^2+9\right)^2}$ und $h''(x)=-12\cdot\dfrac{x^3-27x}{\left(x^2+9\right)^3}$

Notwendige Bedingung:

$h'(x)=0$ d. h. $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x_E=\pm 3$

Hinreichende Bedingung für x = 3

$h''(3)=-12\cdot\dfrac{27-27\cdot 3}{(9+9)^3}>0 \Rightarrow$ Minimum mit der y-Koordinate: $h(3)=0$

Hinreichende Bedingung für x = -3

$h''(3)=-12\cdot\dfrac{-27+27\cdot 3}{(9+9)^3}<0 \Rightarrow$ Maximum mit der y-Koordinate: $h(-3)=\dfrac{36}{18}=2$

Ergebnis: **K hat den Tiefpunkt TP$(3\,|\,0)$ und den Hochpunkt HP$(-3\,|\,2)$**

$\boxed{17}$ **f) Berechnung der Wendepunkte:**

Notwendige Bedingung: $h''(x)=0 \Leftrightarrow x^3-27x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-27\right)=0$

1. Faktor: $x = 0$

2. Faktor: $x^2-27=0 \Leftrightarrow x^2=27 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{27}=\pm 3\sqrt{3}$

Hinreichende Bedingung: $0,\ 3\sqrt{3}$ und $-3\sqrt{3}$ sind einfache Nullstellen von h",

also hat **K** dort Krümmungswechsel.

y-Koordinaten: $h(0)=\dfrac{(-3)^2}{9}=1$,

$$h\left(3\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3\sqrt{3}-3\right)^2}{27+9}=\frac{27-18\sqrt{3}+9}{36}=\frac{36-18\sqrt{3}}{36}=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\approx 0{,}13$$

$$h\left(-3\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-3\sqrt{3}-3\right)^2}{27+9}=\frac{27+18\sqrt{3}+9}{36}=\frac{36+18\sqrt{3}}{36}=1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\approx 1{,}87$$

Ergebnis: $W(0\,|\,1),\ W_2\approx(5{,}2\,|\,0{,}13),\ W_3\approx(-5{,}2\,|\,1{,}87)$

g) Bestimme jetzt die waagrechte Asymptote.

$\Rightarrow \boxed{18}$

$\boxed{18}$ $\boxed{\text{GW}}$

Weil der Grad des Zählers und des Nenners gleich groß sind, besitzt der Graph K von h eine waagrechte Asymptote.
Ihre Gleichung kann man mit der **Grenzwertmethode** bestimmen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+9}{x^2+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{1-0+0}{1+0} = 1$$

Die waagrechte Asymptote ist also $y = 1$.

Oder so:

$$h(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2+9} = \frac{x^2+9}{x^2+9} - \frac{6x}{x^2+9} = \boxed{1-\frac{6x}{x^2+9}}$$

Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{x^2+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{6}{x}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$

ist $y = 1$ die Näherungsfunktion für $x \to \pm\infty$

Dazu noch einen Tipp:

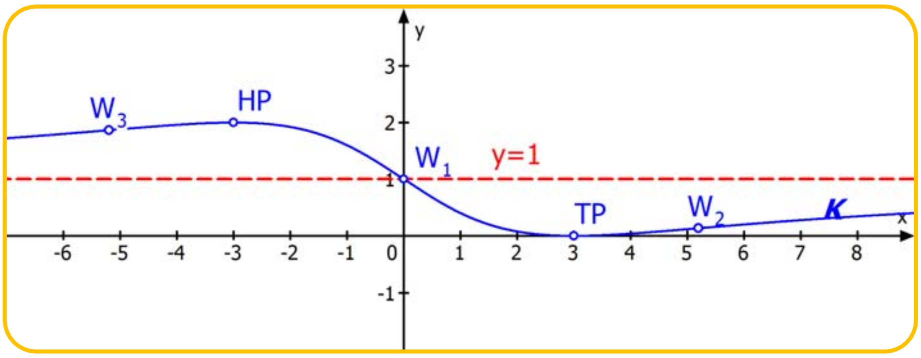
Immer wenn der Grad des Zählers gleich oder größer als der des Nenners ist, kann man den Funktionsterm zerlegen wie hier in $\boxed{h(x) = 1-\frac{6x}{x^2+9}}$,

also allgemein in $f(x) = s(x) + r(x)$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$,

sodass s(x) eine Näherungsfunktion für $x \to \pm\infty$ ist.

Dann ist auch die Ableitung einfacher zu berechnen!

Hier noch das Schaubild K von h:



Erkennst du eine Symmetrie?

$\Rightarrow$ $\boxed{19}$

$\boxed{19}$ Behauptung: K ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W_1(0\,|\,1)$

$\boxed{\text{GW}}$ Eine Kurve ist punktsymmetrisch zu einem Zentrum $Z(a\,|\,b)$, wenn

für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\dfrac{f(a+r)+f(a-r)}{2}=b$

Das bedeutet geometrisch, dass Z der Mittelpunkt zweier spiegelbildlich gelegener Kurvenpunkte $P_1\big(a+r\,|\,f(a+r)\big)$ und $P_2\big(a-r\,|\,f(a-r)\big)$ ist.

Hier ist also nachzuweisen: $\dfrac{h(0+r)+h(0-r)}{2}=1$

oder besser: $h(r)+h(-r)=2$

Beweis:

$$h(r)+h(-r)=\frac{(r-3)^2}{r^2+9}+\frac{(-r-3)^2}{(-r)^2+9}=\frac{r^2-\cancel{6r}+9}{r^2+9}+\frac{r^2+\cancel{6r}+9}{r^2+9}=\frac{2r^2+18}{r^2+9}=\frac{2\cancel{(r^2+9)}}{\cancel{r^2+9}}=2$$

Das war eine anstrengende „Doppelstunde“

Aber wir haben viel Grundlegendes besprochen.

Hoffentlich kannst du dir das merken.

CIAO !